Ich sage euch: Ihr habt Chaos in euch.
Friedrich Nietzsche

Evolution is chaos with feedback.
Joseph Ford

Order doesn't come by itself.
Benoît Mandelbrot

Chaos- und Komplexitätstheorie

Dr. Bernhard v. Guretzky

Abstract:. Ziel dieses Papiers ist es, einen kurzen Überblick über die wesentlichen Begriffe von Chaos- und Komplexitätstheorie zu geben. Dies kann nur ein allererster Einstieg in das Thema sein, denn so salopp wie das Thema hier dargestellt wird, entfaltet es sich bei genauer Betrachtung nicht. Trotzdem hoffe ich, Sensibilität für die Wichtigkeit dieser Themenkomplexe zu schaffen und zu zeigen, dass es sich hier nicht um eine "New-Age-Veranstaltung" handelt, sondern um eine – nicht mehr ganz neue – wissenschaftliche Entwicklung, die zum tieferen Verständnis nicht nur der mathematisierten Wissenschaften beitragen kann. Darauf aufbauend ist bereits an dieser Stelle ein Artikel zum Thema "Kreativität" erscheinen; weitere die die Verbindung von Wissensmanagement und Chaos- und Komplexitätstheorie beleuchten, werden folgen.

1. Einführung

Die westlichen Industriegesellschaften träumen davon, die Natur zu unterwerfen und zu kontrollieren, um Unsicherheiten auszuschalten. Das Ideal "Kontrolle auszuüben", wurde so sehr Teil unseres Verhaltens, dass es zur Obsession wurde ([1], 18) und den Determinismus scheinbar unlösbar mit den Wissenschaften verknüpft hat. Der Determinismusbegriff steht für reguläre, konstante, vorhersagbare und somit kontrollierbare Verknüpftheit von Entitäten. Eine typische wissenschaftliche Idealvorstellung in diesem Sinne bilden exakt berechenbare Kausalketten auf der Grundlage streng deterministischer Gesetze, wobei die mathematische oder logisch-deduktive Determiniertheit meist mit einer grundsätzlichen Determiniertheit qua numerischer Berechenbarkeit identifiziert wird. Der Chaosbegriff dagegen steht gemeinhin für Unordnung, Unregelmäßigkeit, Komplexität, Unberechenbarkeit und Zufall. Er wird darüber hinaus oft mit dem Undurchschaubaren, dem analytisch-begrifflich nicht zu Durchdringenden, dem Irrationalen in Verbindung gebracht ([3], 355). John Keats nannte den Eintritt ins Chaos ein Eintauchen in Zweifel und Ungewissheit, d.h. die Möglichkeit zu ergreifen, den Grad an Freiheit zu erweitern, den man vom Leben zu akzeptieren gelernt hat. Alle, deren Leben in großem Maß Veränderungen unterworfen ist, sind offen für Ungewissheiten und realisieren so einen Freiheitsgrad, der neue Formen von Selbstorganisation hervorbringen kann ([1], 35).

In erkenntnistheoretischer Hinsicht stellt die Chaostheorie eine Reihe von grundlegenden Voraussetzungen einer wissenschaftlichen Weltbeschreibung in Frage: Sie bricht mit klassischen Kausalitäts- und Determinismusbegriffen, gemäß denen eine exakte, langfristige Vorhersagbarkeit und Vorausberechenbarkeit prinzipiell möglich ist. Diese Wiederentdeckung der Komplexität impliziert einen Bruch mit einer positivistischen Wissenschaftsphilosophie. Die Chaostheorie plädiert stattdessen für ein pragmatisches Wissenschaftsverständnis mit Einsicht in die effektiven Beschränkungen von Berechenbarkeit, Kontrollierbarkeit und Machbarkeit. ([3], 354) Sie befasst sich mit der Unordnung und den Unwägbarkeiten der Natur und ebenso mit der Frage, wie darin neue Formen und Strukturen entstehen. Chaos ist die Kreativität der Natur ([1], 25). Diese Sichtweise ist selbst bei renommierten Physikern heute noch umstritten: Andere haben vorgebracht, mit Entwicklungen wie der Chaostheorie seinen Gesetze neuer Art entdeckt worden, die Anwendung fänden, wenn die Komplexität des Systems zunimmt. Das Verhalten eines Elektrons zu verstehen, sei eine Sache, anhand dieses Wissens das Verhalten eines Tornados zu verstehen, eine ganz andere. Auseinander gehen dabei die Meinungen über die Frage, ob die verantwortlichen Prinzipien sich, wenn auch auf ungeheuer komplizierte Weise, aus den physikalischen Prinzipien herleiten, die das Verhalten der außerordentlich großen Zahl von Elementarteilchen bestimmen. Nach meiner Auffassung handelt es sich dabei nicht um neue unabhängige Naturgesetze, sondern um ein rein rechnerisches Problem ([4], 32).

Jedenfalls hat seit Mitte der achtziger Jahre der Begriff des Chaos den Bereich der Wissenschaft, in dem er entstand, weit hinter sich gelassen. Chaos ist auf dem besten Weg, von einer wissenschaftlichen Theorie zu einer neuen kulturellen Metapher zu werden. Es eröffnet damit radikal neue Denk- und Sichtweisen auf die Wirklichkeit. Chaos handelt ebenso von dem, was man nicht wissen kann, wie von dem, was als gesicherte Tatsache vorliegt. Es handelt davon, loszulassen, Grenzen zu akzeptieren, das Magische und Mysteriöse zu feiern ([1], 17).

Die Chaostheorie erweckt nicht nur wieder das alte Verständnis des Universums als Ganzes, sondern liefert dazu auch neue Einsichten. Zum Teil liegt das daran, dass diese ganzheitliche Perspektive aus einer mechanistischen Sicht entstand. Diese Sicht, die Antithese zum Ganzheitlichen, bestimmte die letzten Jahrhunderte und war wiederum einer holistischen Perspektive entsprungen, jener, die im Mittelalter existiert hatte. Im Mittelalter (600-1400) war das europäische Denken von der Vorstellung des Ganzen geprägt. Die Anfänge des mechanistischen Weltbildes nahmen vor etwa 800 Jahren Gestalt an, als sich die europäische Psyche vom Rest des irdischen Lebens zu differenzieren begann. Über die Jahrhunderte wurde die Natur allmählich objektiviert und externalisiert. Im Zuge dessen bildete sich ein Menschenbild heraus, in dem der Einzelne als separates Individuum mit eigenständigen Wünschen und einem Innenleben gesehen wurde. Diese Veränderung lässt sich an der Bedeutungsverschiebung zahlreicher Begriffe festmachen, am Aufblühen der Kunst und dem Beginn der Wissenschaft. Je mehr sich der Mensch von der Natur absonderte, umso distanzierter und objektivierter wurde die Welt für ihn. Es ist kein Zufall, dass sich die Kunst in der Renaissance vor allem mit Fragen der Perspektive beschäftigte, einer geometrischen Technik, bei der die Welt nach außen projiziert und von ferne, wie durch ein Fenster, gesehen wird. Im Grunde bedeutet das nichts anderes, als dass der jeweilige Standpunkt des Malers den zentralen Platz Gottes ersetzte ([1], 169, 171).

Zum Ende des Mittelalters schlossen sich Wissenschaft und Gesellschaft in ihren Rückkoppelungen zusammen und trugen so zur enormen Ausweitung der wissenschaftlichen Weltsicht bei ([1], 172). Die mechanistische Weltsicht brauchte einige Jahrhunderte, bis sich aus den im Spätmittelalter ausgeworfenen Samen die gegenwärtigen wissenschaftlichen und technologischen Triumphe einstellten. An der Schwelle zu unserem Jahrhundert wurde ein anderer Keim gepflanzt, diesmal von Poincaré mit seinen Untersuchungen zum Mehrkörperproblem. Von ihm stammt der Satz: "Sehr kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen können sehr große Unterschiede in den Ergebnissen hervorrufen. Ein kleiner Fehler bei Bestimmung der ersteren wird einen sehr großen Fehler in den letzteren hervorrufen. Eine Voraussage ist unmöglich und wir haben ein zufälliges Ergebnis" ([1], 175).

Sowohl die Metapher des Chaos als auch die Theorie, der sie entsprang, sind Sehweisen und damit geistige Projektionen auf die unendliche Komplexität der Natur, in der bestimmte Nuancen innerhalb des Flusses herausgehoben werden. David Bohm wies gerne darauf hin, dass die Wörter "Theorie" und "Theater" von derselben Wurzel "theorein": sehen, stammen. Wissenschaftliche und philosophische Theorien sind für ihn Theater des Geistes. Theorien sind notwendigerweise Provisorien, sie sind Abstraktionen eines sehr viel größeren Kontextes. Auch der Kontext, in dem Theorien entstehen, ist Veränderungen unterworfen. Sie haben daher immer nur für einen bestimmten Zeitraum Gültigkeit, irgendwann scheinen sie an ihre Grenzen zu kommen, gleichgültig, wie weit sie modifiziert werde; und dann veranlasst das kreative Chaos den Geist dazu, ein neues Theaterstück zu entwerfen ([1], 197).

Der Mitarbeiter des Meteorologen Edmund Lorenz, James Yorke, benutzte als erster den Begriff "Chaos" im Zusammenhang mit dynamischen Systemen in einem Papier.

2. Die Anfänge

Am Anfang des 20. Jahrhunderts spekulierten die Physiker, dass ihr Fach bald an sein Ende käme. Es gab nur noch einige unbedeutende fehlende Informationen, die in das Gesamtgebäude der Physik einzusetzen waren: die Unregelmäßigkeit der Umlaufbahn des Merkur; die Diskrepanz zwischen dem tatsächlichen und theoretischen Wärmebetrag, den ein schwarzer Körper abstrahlt und welche Wirkung ein dritter Körper auf zwei andere hat. Aus der ersten Frage ging die Allgemeine Relativitätstheorie hervor, aus der zweiten die Quantentheorie und aus der dritten die Chaostheorie ([1], 195). Im Gegensatz zu dem oben zitierten Stringtheoretiker Brian Greene wird heute die Chaostheorie von vielen zu den grundlegenden Umwälzungen der Erkenntnis im 20. Jahrhundert gezählt. Dabei geht es nicht um eine Vergleichbarkeit mit der Revolution, die Relativitäts- und Quantentheorie ausgelöst haben, die ja beide vom Chaos betroffen sind, sondern vielmehr darum, die Physik zu einer Renaissance der dem Alltagsverständnis noch am nächsten liegenden klassischen Mechanik zu führen.

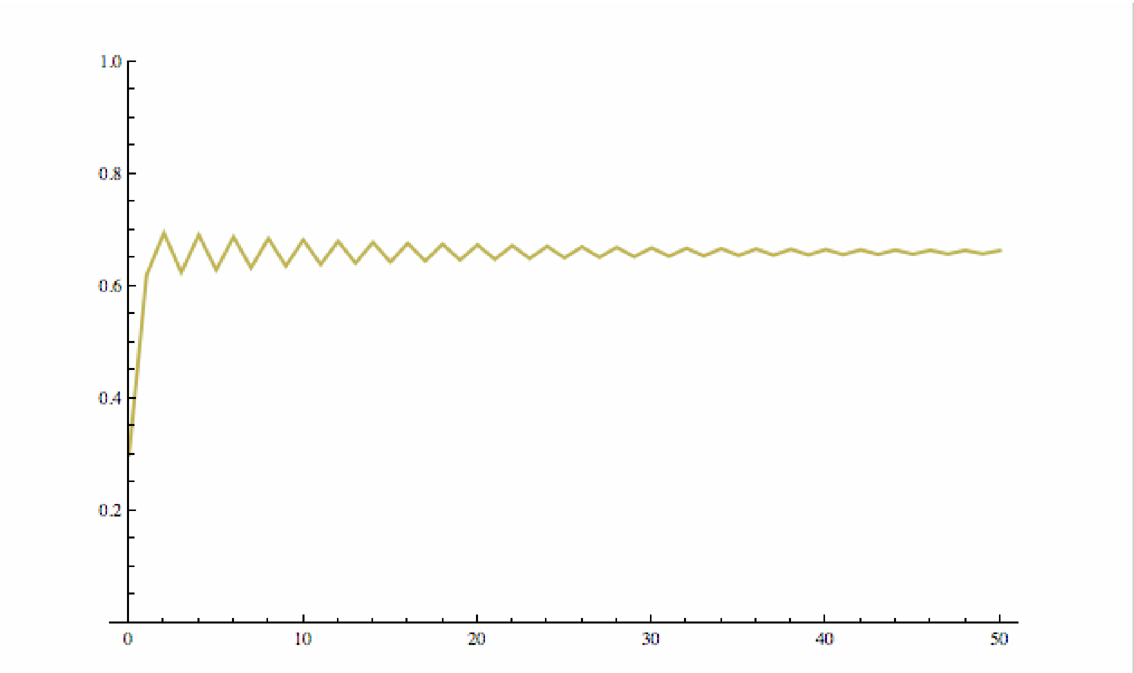
Insofern der Begriff des Chaos in seinen Kernaspekten jedoch auf Probleme der Berechenbarkeit und Unentscheidbarkeit zurückgeführt werden kann, werden damit grundlegende Einsichten thematisiert, die sämtliche axiomatisierten und mathematisierten Naturwissenschaften betreffen. Denn die Chaostheorie stellt hier einen wichtigen methodischen Fortschritt dar, der die komplexen Lösungsstrukturen von Differentialgleichungssystem präziser ausdifferenziert und traditionelle Lösungs- und Berechenbarkeitsideale relativiert ([3], 360).

Die Entwicklung der Theorie, die bis in die Siebziger Jahre des vorigen Jahrhunderts noch von einer Handvoll Wissenschaftler getragen wurde, angefangen von Poincaré, über Ljapunov, Wiener, Lorenz und Ruelle begann zu Beginn der 80iger Jahre eine stürmische Entwicklung. Hier sind vor allem die auch einer weiten Öffentlichkeit genannten Arbeiten von Mandelbrot und Peitgen zu nennen. Zu Beginn der Neunziger Jahre sind bereits über 120 Monographien und ca. 7.000 Artikel zu dem Thema veröffentlicht worden.

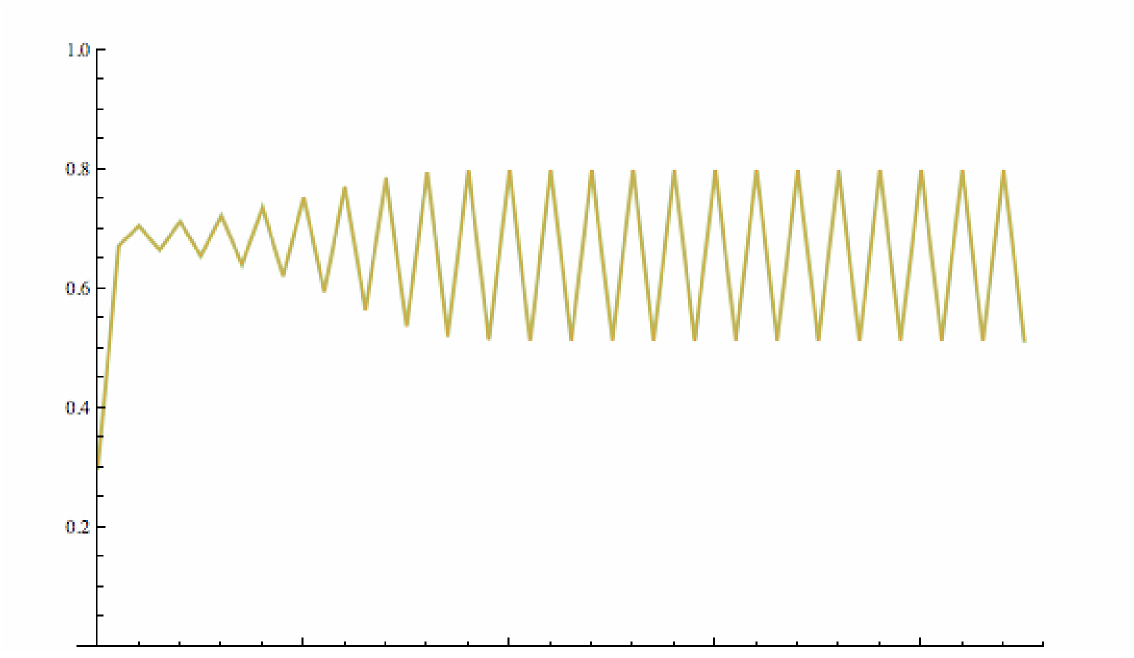
Eine allgemeine Definition für Chaos gibt es nicht. Im speziellen Fall der Iteration dynamischer Systeme hat man sich auf folgende Eigenschaften geeinigt:

- sensitive Abhängigkeit der zeitlichen Entwicklung von den Anfangsbedingungen
- Mischen der Bahnen im Zustandsraum
- periodische Punkte, die im Zustandsraum dicht liegen.

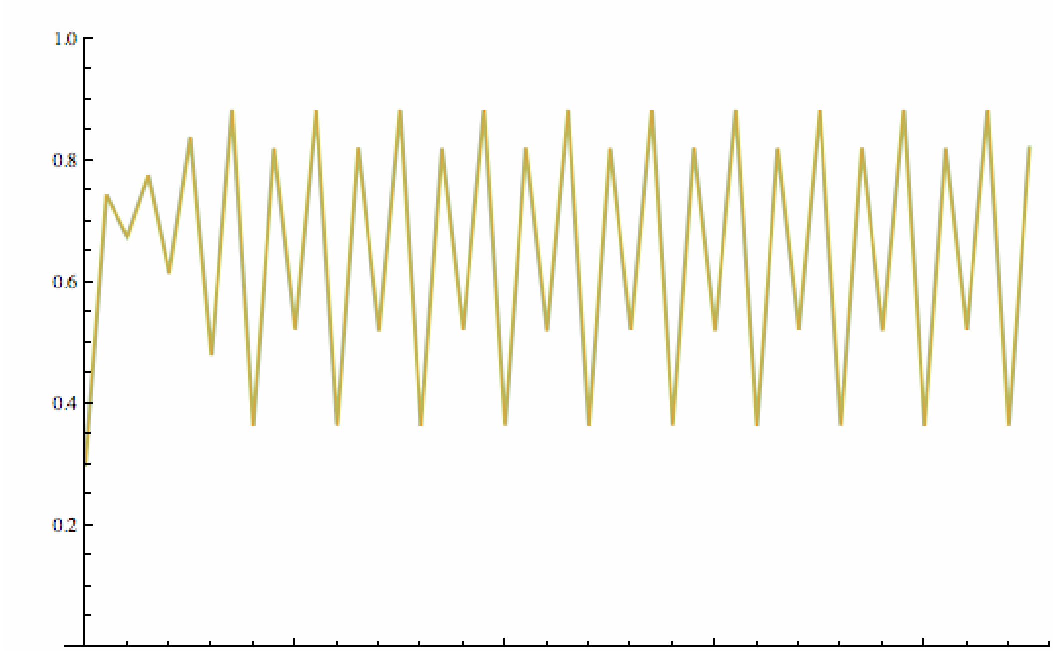
Punkt 3 bedeutet, dass reguläre, periodische Zonen und chaotische Zonen im Zustandsraum vermischt sind. Am Beispiel der logistischen Gleichung $f(x) = \lambda x(1 - x)$ – einer Sonderform der einfachsten rekursiven Differenzengleichung der Form $f(x_t) = x_{t+1}$ – die schon 1837 von Verhulst zur Berechnung demographischer Modelle von Tierpopulationen benutzt wurde, lässt sich chaotisches Verhalten gut demonstrieren. Bleibt der Kontrollparameter $\lambda < 3$ strebt das System über die Zeit einem Gleichgewichtszustand, dem sog. Punktakttraktor zu:



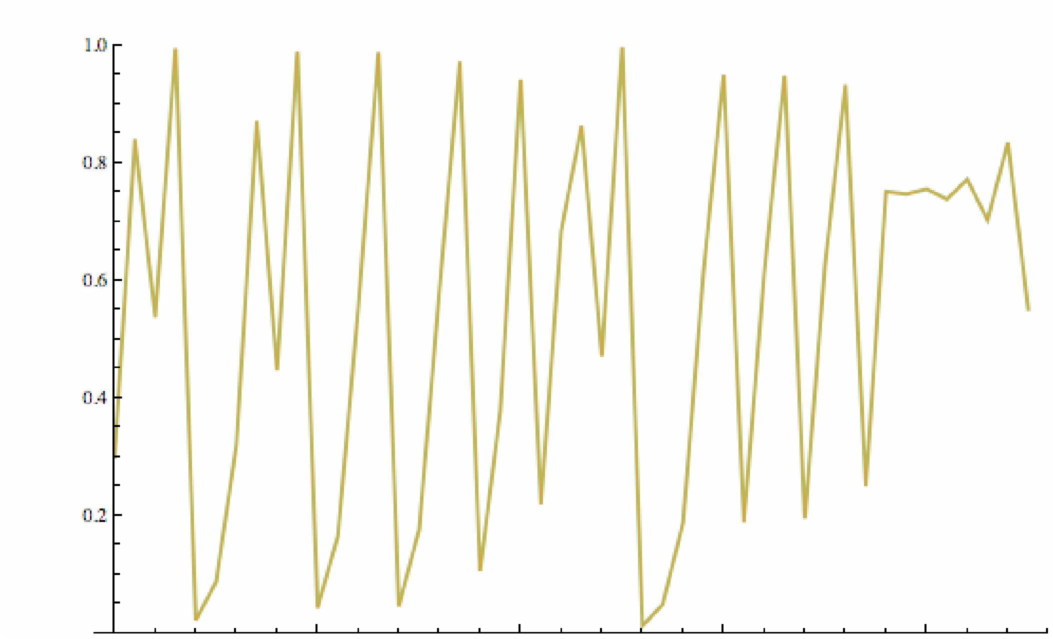
Bei λ < 3,2 bleibt das System stabil innerhalb bestimmter Grenzen, es strebt einem Grenzzykel zu:



Übersteigt der Kontrollparameter einen kritischen Schwellenwert wird dieser Zweig der Zustände instabil; das System vermag die eigenen Schwingungen nicht mehr zu dämpfen und schlägt bei λ > 3,5 in eine "ungeordnete" Oszillation um:



Erreicht der Kontrollparameter λ den Schwellenwert 4 (Bifurkationspunkt), tritt das "Chaos" ein, die sensitive Abhängigkeit der Anfangsbedingungen. Es strebt dem sog. Seltsamen Attraktor zu:



3. Nichtlinearität und Komplexität

Unter Linearität wird in erster Linie eine Struktureigenschaft mathematischer Ausdrücke verstanden. Die Strukturelemente sind additiv miteinander verknüpft. So können bei linearen Differentialgleichungen zwei Lösungen addiert werden, um eine neue Lösung zu erhalten. In einem linearen System besteht damit zwischen Ursache und Wirkung ein proportionaler Zusammenhang. Jedes lineare System kann mit

Methoden der Analysis gelöst werden. Ein nichtlineares System dagegen kann nicht in seine Summanden zerlegt werden, die dann einzeln gelöst und anschließend wieder additiv verknüpft werden. Ein System heißt nichtlinear, wenn zwei oder mehr Komponenten derart miteinander verkoppelt sind, dass zeitliche Änderungen der Zustandsvariablen nicht direkt proportional zu den wirkenden Kräften sind. Zwei Lösungen eines nichtlinearen Systems lassen sich damit nicht zu einer neuen Lösung addieren; nichtlineare Gleichungssysteme können daher nur in ihrer Gesamtkomplexität gelöst werden. Aufgrund der damit verbundenen mathematischen Schwierigkeiten werden solche Systeme meist linearisiert ([6], S. 62ff). Der Begriff "dynamische Systeme" wird synonym mit "nichtlinearen Systemen" verwendet.

Komplexe physikalische Prozesse transformieren den Anfangszustand eines Systems und determinieren über Bewegungsgleichungen die Zustände der zeitlichen Systementwicklung. Theoretische Modelle physikalischer Prozesse sind Berechnungsschemata, wobei die Anfangsdaten durch Algorithmen transformiert werden, die die Bewegungsgleichungen repräsentieren. Solche Algorithmen sind iterativ und intrinsisch nichtlinear ([3], S. 428). Differentialgleichungen stellen die Realität als ein Kontinuum dar, das sich stetig und nicht in Brüchen verändert. Und die Physik besteht darin, sich ein Bild der Welt in Form von Differentialgleichungen zu machen. Seit Leibnitz und Newton ist es Hauptaufgabe der Physiker, Differentialgleichungen zu lösen, sie zumindest näherungsweise in linearer Form zu lösen. Der Triumph von Wissenschaft und Technik der letzten 250 Jahre ruht praktisch auf den Schultern dieser Gleichungen. In dieser Zeit haben sich die Wissenschaftler an diese – sehr erfolgreiche – wissenschaftliche Arbeitsweise gewöhnt. Dabei haben sie aus dem Blick verloren haben, dass erstens die meisten Differentialgleichungen überhaupt keine Lösung haben und zweitens – wichtiger – die Welt nicht dem stetigen Ablauf gehorcht.

Differentialgleichungen stellen die Realität als ein Kontinuum dar, das sich stetig und nicht in Brüchen verändert. Und die Physik besteht darin, sich ein Bild der Welt in Form von Differentialgleichungen zu machen. Seit Leibnitz und Newton ist es Hauptaufgabe der Physiker, Differentialgleichungen zu lösen, sie zumindest näherungsweise in linearer Form zu lösen. Der Triumph von Wissenschaft und Technik der letzten 250 Jahre ruht praktisch auf den Schultern dieser Gleichungen. In dieser Zeit haben sich die Wissenschaftler an diese – sehr erfolgreiche – wissenschaftliche Arbeitsweise gewöhnt, dass es aus dem Blick verloren haben, dass erstens die meisten Differentialgleichungen überhaupt keine Lösung haben und zweiten – wichtiger – die Welt nicht dem steigen Ablauf gehorcht. ("The first message is, that there is disorder, but physicists want to discover regularities.")

Differentialgleichungen kommen in der klassischen wie der Quantenphysik zur Anwendung: Die Newton'schen Bewegungsgleichungen in der Mechanik, die Maxwell'schen Gleichungen in der Elektrodynamik, die Einsteinschen Feldgleichungen in der Gravitationstheorie sowie die Schrödingergleichung in der Quantenmechanik. Diese Gleichungen werden durch sog. Hamiltonoperatoren dargestellt. Eine reguläre, langfristig effektiv berechenbare Bewegung liegt vor, wenn das Differentialgleichungssystem integrierbar ist, d.h. Lösungen für diese Bewegungsgleichungen existieren. Allerdings verlieren integrierbare Systeme i. a. durch kleinste Störungen die Eigenschaft der Integrabilität und sind damit den verfügbaren analytischen Methoden nicht mehr zugänglich ([3], 382). Die Empfindlichkeit gegenüber Störungen zeigt folgendes Beispiel: Die extrem kleinen Veränderungen der Gravitationskraft, die ein sich bewegender Zuschauer auf eine Billardkugel ausübt führt bei Vernachlässigung der Reibung bereits nach neun Zusammenstößen der Kugel zu völlig unberechenbarem Verhalten ([3], 377): In einer nichtlinearen Dynamik sind die zeitlichen Änderungen der Zustandvariablen nicht mehr direkt proportional zu den Ursachen.

Der Zustand eines komplexen Systems lässt sich durch die Zustandsvektoren eindeutig darstellen. Die zeitliche Veränderung dieser Zustandsvektoren (Ort, Geschwindigkeit, Temperatur, Druck, Dichte, Angebot, Nachfrage usw.) ergibt dann eine Punktfolge von Zuständen, die sogenannten Trajektorien. Verschiedene Trajektorien sind durch verschiedene Anfangszustände bestimmt. Bleiben die Trajektorien, die von benachbarten Anfangszuständen ausgehen, im Laufe der Zeit beieinander, so führt das System periodische Bewegungen aus oder strebt einem stabilen Endzustand zu. Entfernen sie sich dagegen im Laufe der Zeit voneinander, so hat das System chaotischen Charakter. Die Integrabilität eines dynamischen Systems bedeutet, dass zur Charakterisierung der Dynamik der Trajektorienverlauf im Zustandsraum nicht explizit – also Integrationsschritt für Integrationsschritt – angegeben werden muss, sondern dass aus der Kenntnis der Anfangsbedingungen und des Endzeitpunktes jeder Trajektorienwert (Orts- und Impulsvektor) mittels eines einfachen iterativ auszuführenden Algorithmus berechnet werden kann. Trajektorien, für die eine solche Informationskomprimierung nicht gelingt, heißen chaotisch ([3], 400). Grundsätzlich gilt, dass vollständig integrierbare Systeme die Ausnahme sind; hier behauptet die Chaostheorie:

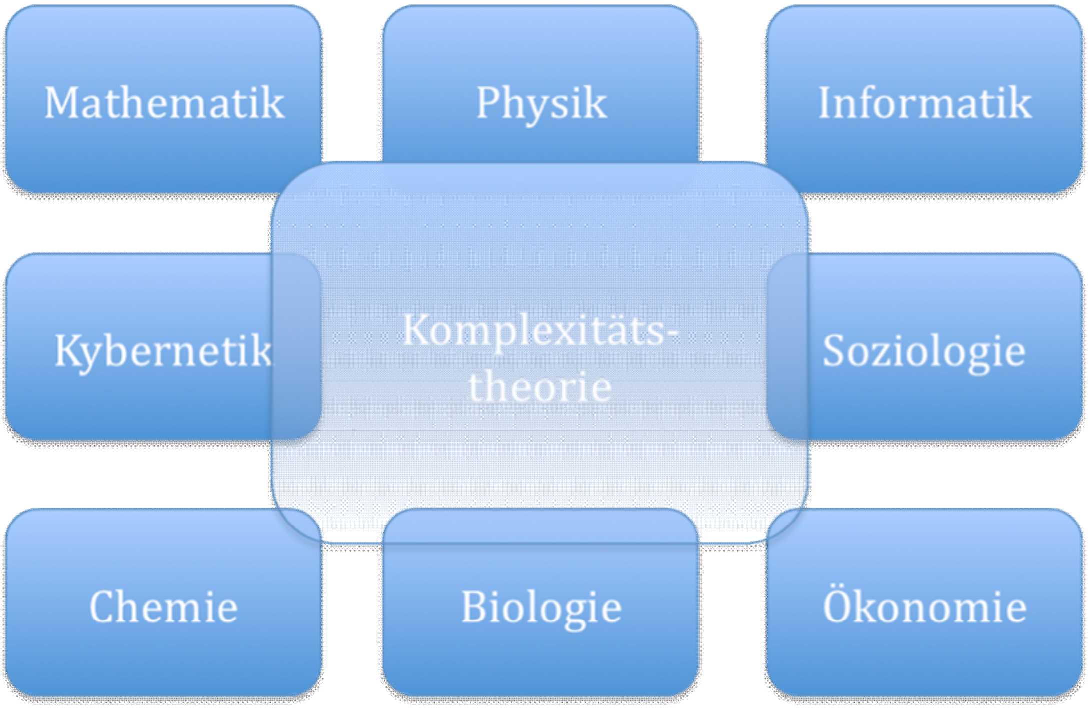
- Chaos kann als Eigenschaft deterministischer System aufgefasst werden.
- Chaos ist eine wesentliche Eigenschaft der meisten nicht-linearen Systeme, die innerhalb der Theorie der Differentialgleichungen nicht behandelt werden können.
- Mathematisch Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Differentialgleichungen garantieren noch nicht die Existenz numerisch behandelbarer Algorithmen zur Berechnung der Lösungen.

Poincaré hat 1890 gezeigt, dass bereits das Problem der Bewegung zweier Planeten im Gravitationsfeld der Sonne nicht mehr allgemein lösbar ist und keine konvergenten Störungsentwicklungen für das langfristige Verhalten des Systems angegeben werden können, denn bereits kleine Störungen modifizieren die grundlegenden Eigenschaften integrabler Hamiltonsysteme signifikant. "Man ist bestürzt über die Komplexität der Figur der Trajektorien, die ich nicht einmal versuche zu skizzieren. Nichts kann uns eine bessere Vorstellung geben von der Komplexität des Dreikörperproblems und aller dynamischen Probleme, in denen kein holomorphes Integral existiert" ([3], 383).

Dass die Welt jedoch nicht vollständig im Chaos versinkt, wird durch Arbeiten von Kolmogoroff, Arnold und Moser in ihrem sog. KAM-Theorem theoretisch bestätigt. Dieses Theorem kann als ein Stabilitätssatz für Hamiltonsysteme angesehen werden. Es besagt, dass die Trajektorien im Zustandsraum weder vollständig regulär noch vollständig irregulär sind. Die Nichtexistenz von Bewegungsintegralen ist also keine hinreichende Bedingung für Instabilität und langfristige Nichtberechenbarkeit, wodurch ex post die Erfolgsgeschichte der klassischen Physik erklärt wird. Chaotisches periodisches Verhalten kann also auf dem Computer nicht längerfristig exakt beobachtet werden. Somit erscheint es äußerst problematisch, überhaupt chaotische Bahnen auf dem Computer berechnen zu wollen. Nach neueren Resultaten der Zahlentheorie kann jedoch eine gewisse Entwarnung gegeben werden, denn es gilt: Für chaotische Systeme ist jede vom Computer berechnete Bahn aufgrund der Sensitivität nach endlicher Zeit bzw. Iterationsanzahl grundsätzlich falsch. Dennoch besitzt das Ergebnis relevante Aussagekraft, da sie eine gute Approximation darstellt.

Einen Schritt weiter als die Chaostheorie geht die Komplexitätsforschung, die sich mit der Frage beschäftigt, wie durch Wechselwirkung vieler Elemente eines komplexen Systems, Ordnung und Strukturen aber auch Chaos und Zusammenbruch entstehen können. So lassen sich Ordnungen durch Ordnungsparameter charakterisieren; Ordnung wie Chaos entsteht in kritischen Zuständen und bei Phasenübergängen. Solche Phasenübergänge können parametrisiert sein und entstehen durch Wechselwirkung des Systems mit seiner Umgebung. Es geht darum, diese Zustände – Attraktoren – im Vorfeld zu erkennen und rechtzeitig geeignete Vorkehrungen zu treffen.

Komplexität erzeugt eine nichtlineare Dynamik und wird deshalb mit den Methoden der nichtlinearen Funktionalanalysis und der Chaostheorie untersucht: Die Theorie komplexer dynamischer Systeme – Komplexitätstheorie – ist eine interdisziplinäre Methodologie zur Modellierung nichtlinearer Prozesse an der Schwelle zwischen Stabilität und Chaos in Natur und Gesellschaft. Anwendungen sind die Herausforderungen der Globalisierung, von Umwelt und Klima und die Bewältigung der Informationsflut, wie die Physik, wo die Erscheinungsformen der Naturgesetzte fraktale Eigenschaften haben, d.h. über eine Selbstähnlichkeit in den verschiedenen Größen- und Anwendungsbereichen verfügen.



Komplexität tritt an der Grenze zwischen den verschiedenen Disziplinen in Erscheinung. Komplexitätstheorie ist keine eigenständige wissenschaftliche Disziplin, sie ist ein Metamodell. Am häufigsten hat man es mit komplexen Phänomenen an der Schnittstelle von Natur und Mensch zu tun.

Komplexität kann als ein Maß für die Unbestimmbarkeit oder den Mangel an Information zur vollständigen Erfassung des Systems aufgefasst werden: sie wächst mit der Menge von Parametern, die erforderlich sind, ein System zu beschreiben und der Ungewissheit, welche mit dem System assoziiert ist. Vor dem Hintergrund der Generalisierungsfähigkeit der gewählten Beschreibung ist begrenztes Wissen oft wertvoller als Detailwissen. Durch Vernachlässigung situationsspezifischer Details besteht die Chance, mit einem vereinfachten mentalen Modell das Systemverhaltens robuster zu machen.

4. Attraktoren

Seit Newton ist das Zwei-Körperproblem analytisch gelöst. Bei Drei- und Mehr-Körperproblemen hat Poincaré nachgewiesen, dass die Bewegungsgleichungen zwar annährend gelöst werden können, aber es keine Lösungen der entsprechenden Differentialgleichungen gibt. Demzufolge können längerfristige Aussagen über das Verhalten bspw. unseres Planetensystems prinzipiell nicht getroffen werden.

Im Gegensatz zu linearen Systemen, die prinzipiell lösbar und damit auch klassifizierbar sind, unterscheiden sich nichtlineare System voneinander: Die Lösung einer Gleichung liefert keine Anhaltspunkte zum Verständnis eines anderen Typs. Hier kommen die Attraktoren ins Spiel, die versteckte Strukturen nichtlinearer Systeme, ihre Stabilität beschreiben. Attraktoren sind so etwas wie Grenzwerte nichtlinearer

Gleichungen, die den Endzustand eines dynamischen Systems beschreiben. Die mathematisch korrekte Definition für einen Attraktor lautet:

> Ist x_0 Fixpunkt eines dynamischen Systems H, d.h. $H(x_0) = x_0$ so heißt x_0 Attraktor, wenn es ein ε gibt, so dass für jedes $x \neq x_0$ mit $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$ gilt: $\|H(x) - x_0\| \leq \|x - x_0\|$. Umgekehrt spricht man von einem Repeller, wenn stattdessen folgt: $\|H(x) - x_0\| \geq \|x - x_0\|$.

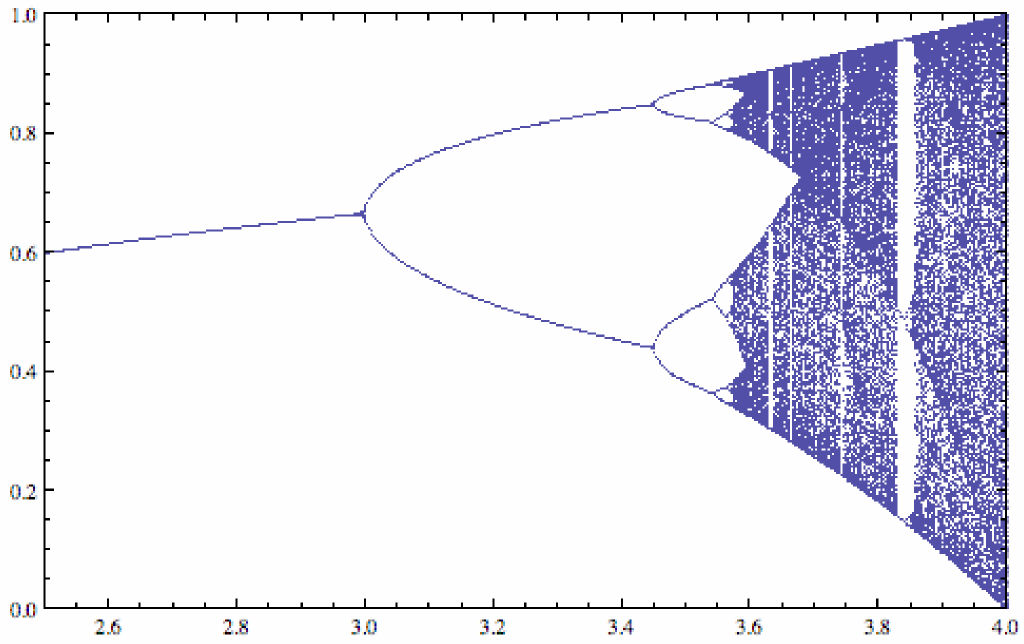
Attraktoren sind die Zustände, in denen ein dynamisches System langfristig hineingezogen wird, sie sind eine unter der zeitlichen Entwicklung des Systems invariante Teilmenge des Zustandsraumes. Ein Gleichgewichtszustand entspricht einem (Fix-)Punkt-Attraktor; im Zustandsraum konvergieren alle Trajektorien zu diesem Punkt. Lineare Systeme besitzen nur Punkt-Attraktoren. Nichtlineare Systeme besitzen auch sog. Grenzzyklen, in denen sich die Zustände periodisch wiederholen oder bei denen sich die Trajektorien irregulär und nicht periodisch im Zustandsraum verdichten. Man spricht von einem "Seltsamen Attraktor" wenn der Endzustand eines dynamischen Systems ein Fraktal ist: Beliebig kleine Änderungen des Anfangszustandes führen zu völlig unterschiedlichen Verläufen. Hat ein System einen "seltsamen" oder "chaotischen" Attraktor, dann tendiert es bei interagierenden Rückkoppelungen zu einem bestimmten Verhaltensmuster. Das System wird zu diesem Verhaltensmuster "hingezogen", wird es gestört, neigt es dazu, schnell wieder zu dem Ausgangszustand zurückzukehren. Zum Wesen seltsamer Attraktoren in chaotischen Systemen gehört deren Vielfalt. Wird deren Vielfalt reduziert, das System also homogener, wird es spröde, brüchig und anfällig für einen nichtlinearen Kollaps.

Beispiel eines Seltsamen Attraktors

Ein Maß für die topologischen Eigenschaften eines Attraktors eines dynamischen Systems ist der sog. Ljapunov-Exponent. Er misst, wie sich die Trajektorien im Zustandsraum dehnen, falten oder stauchen lassen, und gibt damit Auskunft über die Stabilität des Systems.

5. Bifurkation

Neue Ordnungsstrukturen entstehen in Systemen fern eines thermischen oder informationstheoretischen Gleichgewichts dadurch, dass äußere Kontrollgrößen wie Temperatur, Energie oder Information verändert werden bis der alte Systemzustand instabil wird und in einen neuen umschlägt. Bei kritischen Werten instabiler Zustände entstehen spontan Ordnungsstrukturen, die sich durch kollektive Wechselwirkung der Systemteilchen organisieren. Um solche Phasenübergänge jenseits kritischer Werte zu veranschaulichen werden Bifurkationsdiagramme verwendet, bei denen die Zustandgröße des Systems in Abhängigkeit von einem Kontrollparameter aufgetragen wird. ([5], 41) Das Bifurkationsdiagramm der logistischen Gleichung $f(x) = \lambda x(1-x)$ für die Werte des Parameters $2{,}4 < \lambda < 4$ sieht folgendermaßen aus:



Bifurkation der Logistischen Gleichung

Übersteigt der Kontrollparameter (λ) einen kritischen Schwellenwert wird dieser Zweig der Zustände instabil; das System vermag die eigenen Schwingungen nicht mehr zu dämpfen und schlägt bei $\lambda > 3{,}5$ in eine "ungeordnete" Oszillation um; das "Chaos" beginnt. In den Verzweigungsästen liegen lokal stabile Ordnungsmuster vor, die bei weiterer Erhöhung von λ wieder instabil werden. Die weißen Gebiete jenseits des Wertes von $\lambda = 3{,}8$ sind solche Inseln der Ordnung im Chaos.

Der mathematische Begriff der Bifurkation (Verzweigung) wurde von Poincaré für parameterabhängige Phasenübergänge (phase transitions) angewandt. Man spricht von einer Bifurkation, wenn eine kleine Änderung eines Parameters eines Vektorfeldes eine "plötzliche" Veränderung der toplogischen Struktur zur Folge hat, wenn also die Differentiation dieses Feldes an diesem Punkt unstetig ist bzw. sich die Anzahl der Attraktoren dieses Systems verändert. In der Mathematik ist die Bifurkationstheorie eng mit der Theorie der Eigenwerte verbunden.

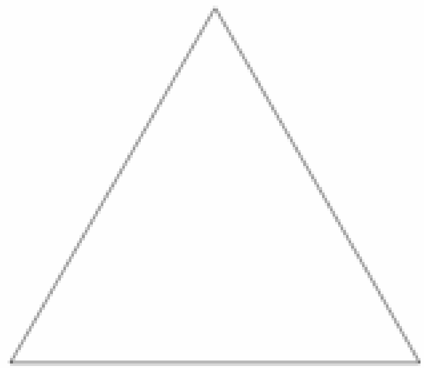
6. Intermittenz

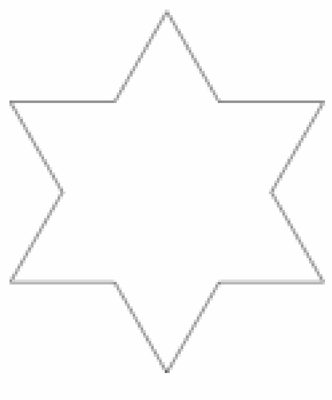
Wirken Interaktion, Iteration und Rückkoppelung zusammen, werden Einfaches und Komplexes laufend ineinander transformiert. Reguläres Verhalten wird durch Perioden chaotischen Verhaltens unterbrochen: diese Übergänge werden durch Bifurkationen beschrieben. Intermittenz bedeutet nicht nur das Auftreten von Chaos innerhalb stabiler Ordnungen, sondern auch das Auftauchen von Ordnungsfeldern inmitten des Chaos (Aktienmärkte, Nervenbahnen, Tierpopulationen, elektronische Schaltkreise oder: Betrachtet man die Staub- und Gesteinverteilung in den Saturnringen oder die

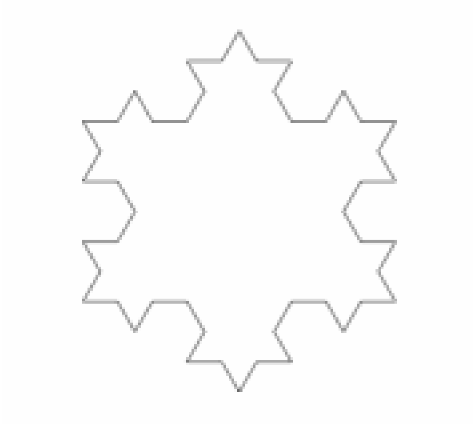
Masseverteilung innerhalb des Asteroidengürtels, so erkennt man darin leere Abschnitte, in denen jegliche Materie fehlt. Auch sie sind Beispiele für Intermittenz. Der Grund dafür sind die jeweiligen Anziehungskräfte der Sonne und Planeten untereinander, wodurch in gewissen Regionen chaotische Kräfte einwirken und Materieteile, die sich in diese Bereiche verirren, instabilem Verhalten aussetzen und schließlich weggeschleudert werden. Irrationale Zahlen sind eine Form von Intermittenz, Ausbrüche unendlicher Komplexität und vollkommener Willkür innerhalb eines geordneten Systems. Irrationalität steht daher im Zentrum sowohl der Logik wie des Kosmos) ([1], 101, 104, 106).

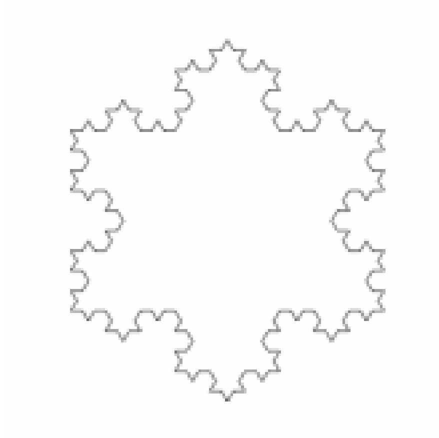
7. Fraktale

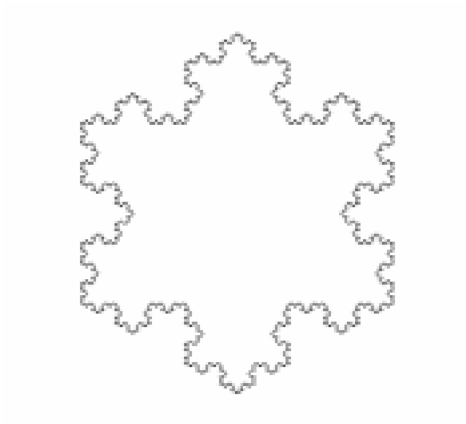
Der Begriff "Fraktal" stammt von Benoit Mandelbrot aus dem Jahr 1975 und steht heute für die Beschreibung von Objekten, die irregulär geformt zu sein scheinen, fragmentiert, aufgebrochen, zerrissen: Das Vermessen einer Küstenlinie ist abhängig vom Maßstab: je genauer man schaut, desto länger wird die Linie. Fraktale sind geometrische Objekte die skaleninvariant sind bzw. "selbstähnlich" sind: Bei Vergrößerung des Maßstabs verändern sich die geometrischen Strukturen nicht:



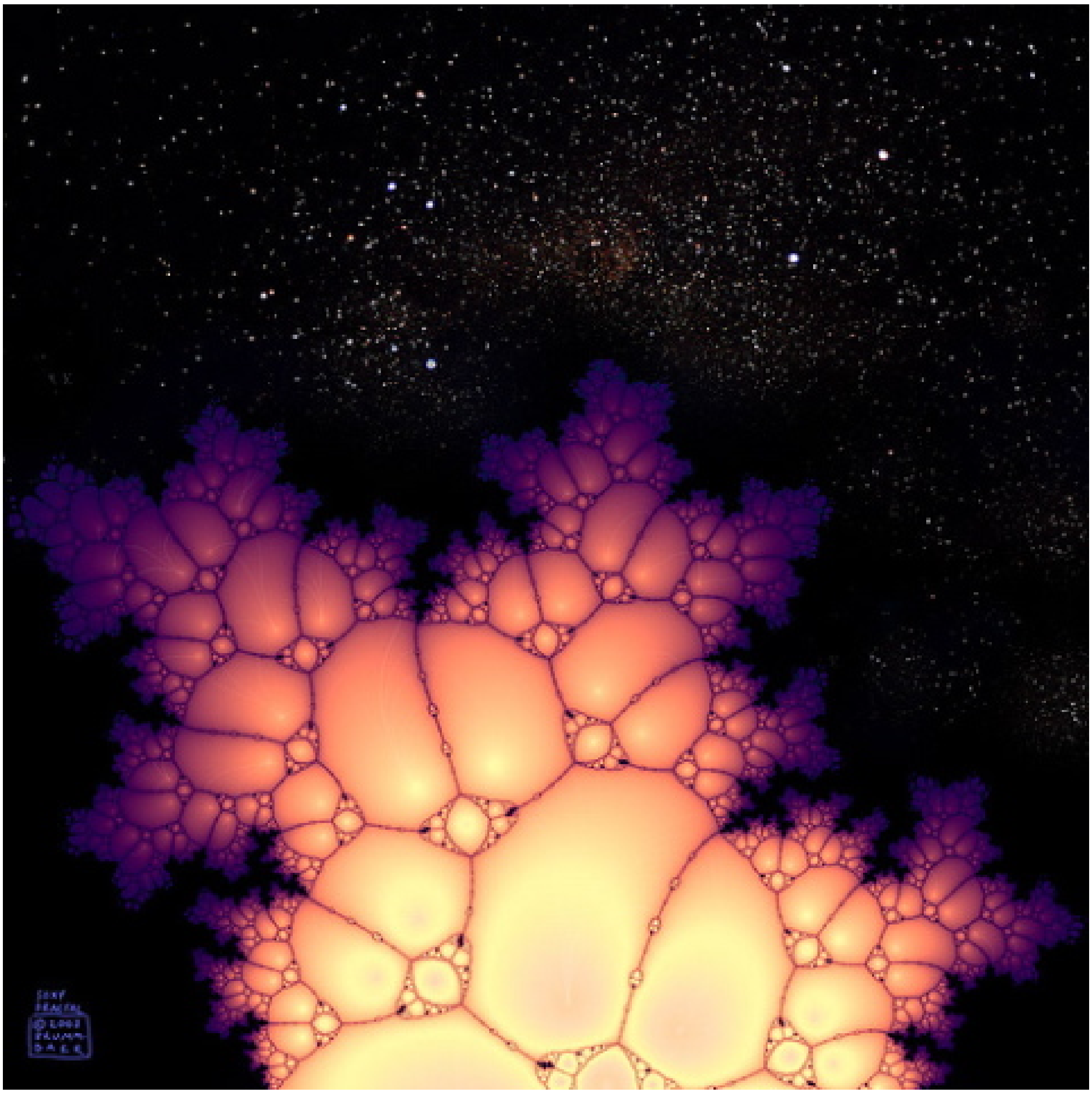






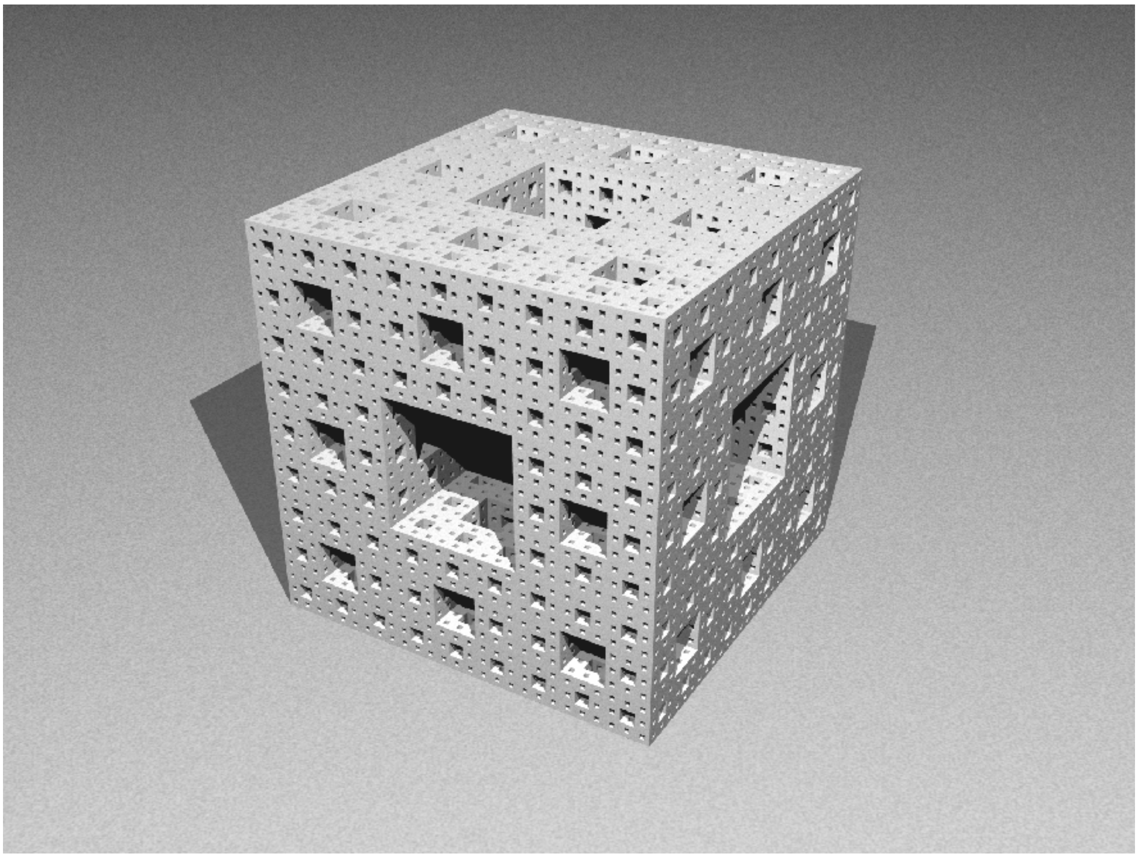


Die sog. Koch-Kurve verdeutlicht den Begriff der Skaleninvarianz. Hier wiederholt sich die Dreiecksbildung. Die künstlerische Variante der oben in den ersten vier Iterationen dargestellten Koch-Kurve zeigt folgendes Bild:



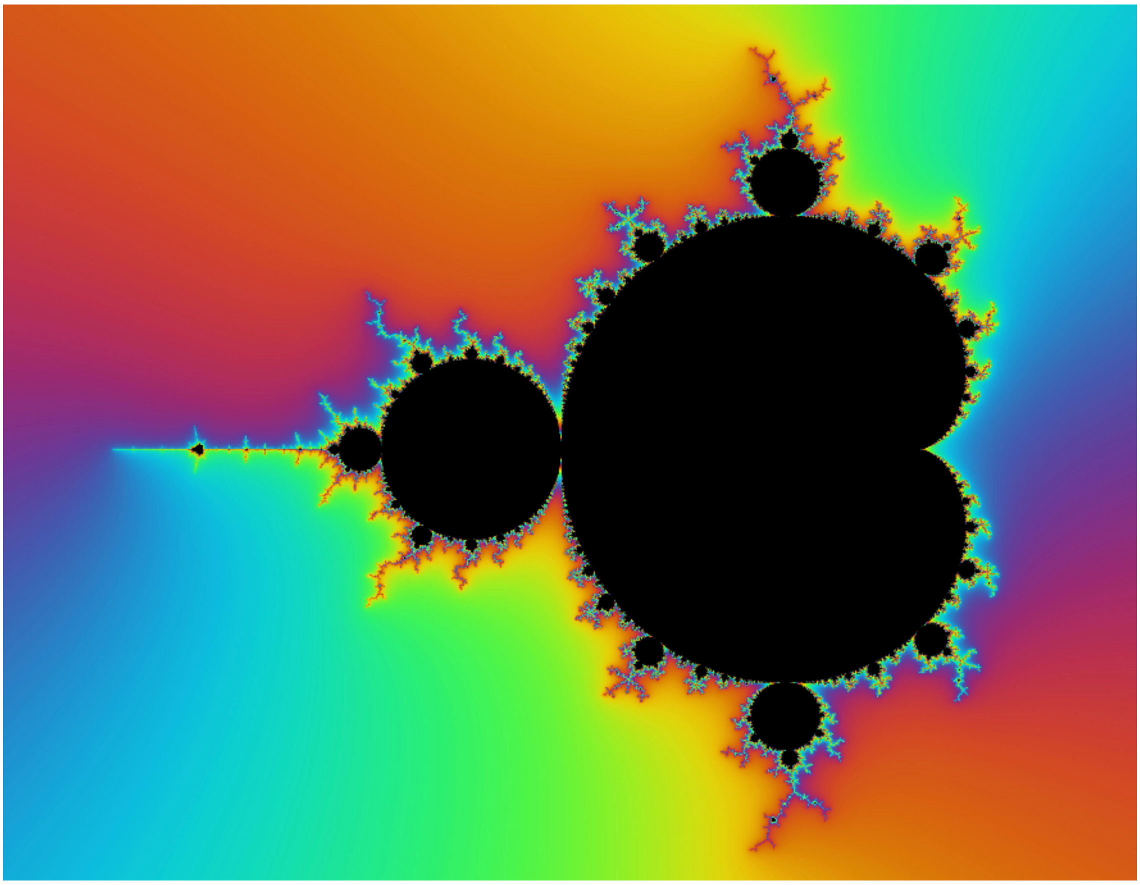
Koch-Kurve

Das komplexere Beispiel einer Selbstähnlichkeit ist der Menger-Schwamms – eine Cantor-Menge – verdeutlicht dieses Phänomen: Das Volumen ist gleich 0 (Das Maß der Menge ist Null, ihre Mächtigkeit jedoch überabzählbar:



Cantor Menge: Menger-Schwamm: Oberfläche = ∞; Volumen = 0
(http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fe/Menger_sponge.png)

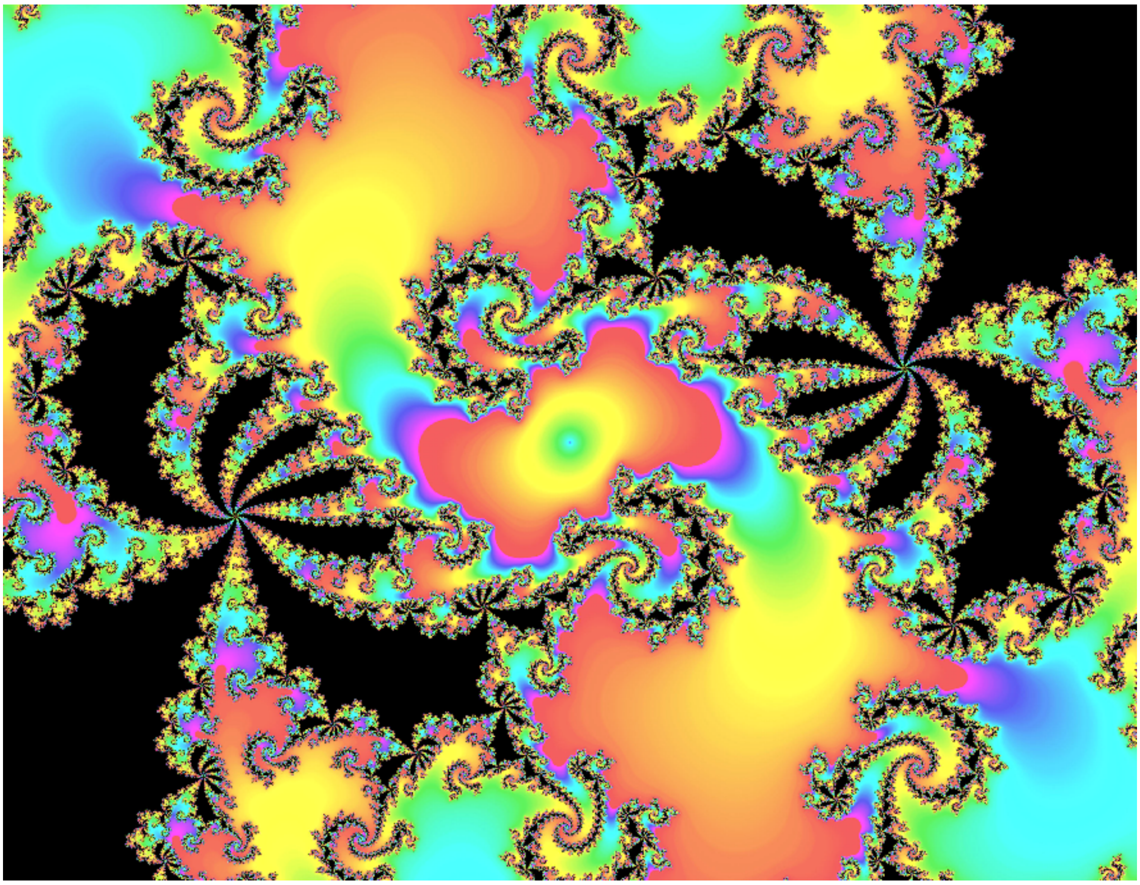
Mandelbrots Verdienst war es zu zeigen, dass die Komplexität der Natur nur im Kontext der Euklidischen Geometrie existiert. Die fraktale Geometrie hat sich inzwischen als sehr viel bessere Form der Beschreibung der Natur erwiesen als die euklidische Ausdrucksweise, ähnlich wie das in der Physik mit der Riemann'schen Geometrie 100 Jahre zuvor passiert ist. Sein Buch von 1982 "Fractal Geometry of Nature" hat es als einziges mathematisches Textbuch auf die Bestsellerlisten geschafft! Zu Hilfe kamen ihm hier die berühmten Apfelmännchen:



Mandelbrotmenge – "Apfelmännchen"

Verallgemeinerungen von Mandelbrotmengen sind die sog. Julia-Mengen: Sie bestehen aus periodischen Repellern, deren mengentheoretisches Komplement heißt Fatou-Menge. Bei dynamischen Systemen besteht eine Julia-Menge aus diesen Punkten, bei denen sich das Verhalten des Systems schlagartig ändert, es also in einen chaotischen Zustand übergeht.

Die Chaostheorie ersetzt die gerade Linie durch eine komplexe Struktur fraktaler Dimension. Auf jeder seiner Ebene offenbart das Fraktal neue Muster und Einzelheiten. Laut der Chaostheorie gibt es in der Natur keine geraden Linien. Was aus der Ferne linear erscheint, erweist sich bei näherer Betrachtung als gewunden, von arabesker Gestalt und mit unendlichen fraktalen Details versehen ([1], 146).



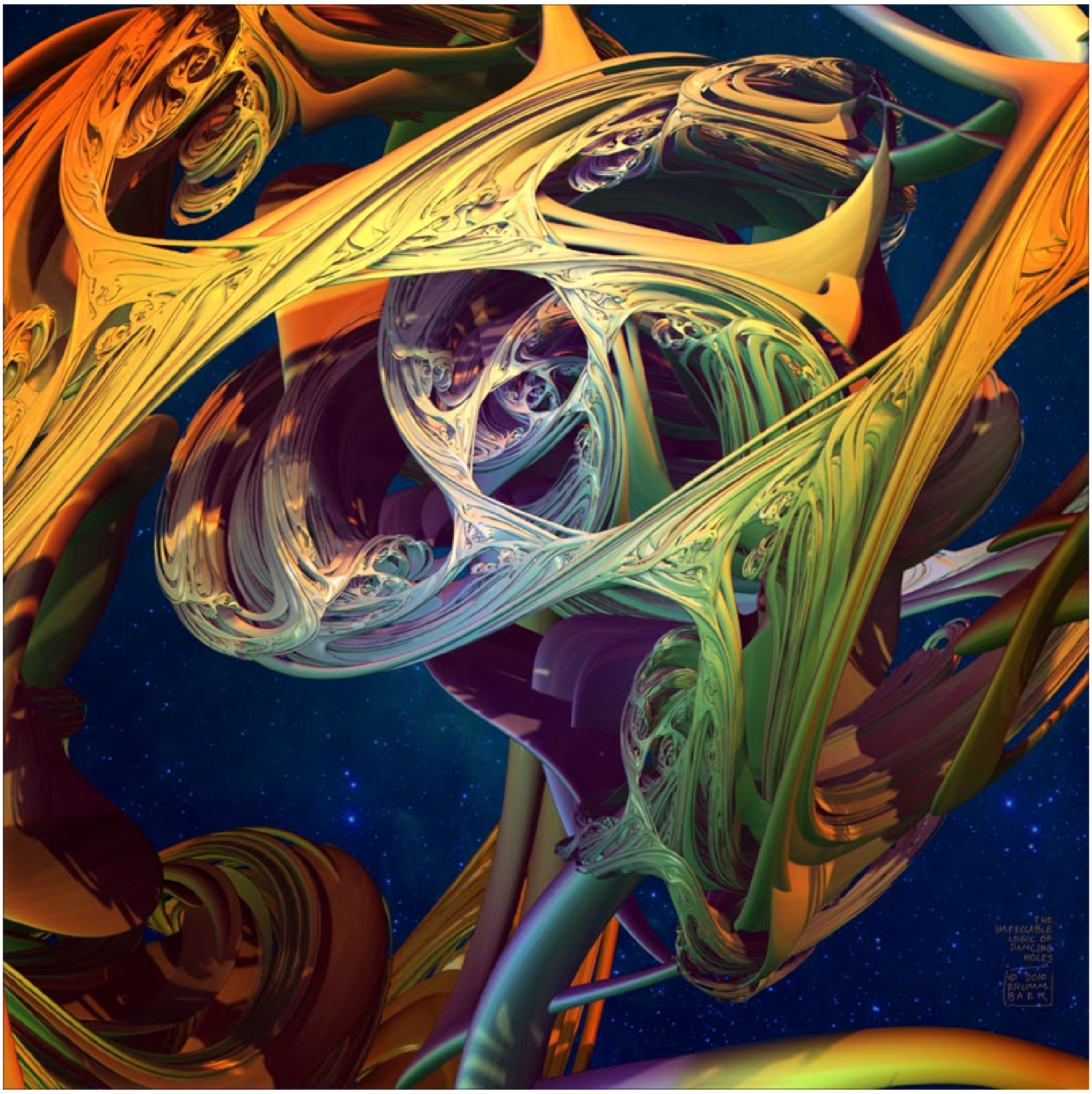
Julia Menge

8. Fraktale Dimension

Der Begriff der *fraktalen Dimension* wurde eingeführt, um ein Maß dafür zu haben, wie "kompliziert", wie "rau" eine geometrische Figur ist. Die Idee für diesen Begriff kam Benoît Mandelbrot, als er die Länge einer Küstenlinie bestimmen wollte. Die hängt ja vom Maßstab ab. Je kleiner dieser ist, desto größer das Ergebnis der Messung, das sogar divergiert, wenn man den Maßstab beliebig klein werden lässt. Legt man also Raster über die Linie und macht dieses beliebig klein, so erhält man das Ergebnis. Der Zusammenhang zwischen Rastergröße ε und Rasterzahl n, ausgedrückt als Potenzgesetz, widerspiegelt die fraktale Dimension: Der Betrag des Exponenten δ der Potenzfunktion entspricht der fraktalen Dimension dieses Objektes:

$$n = \varepsilon^{-\delta} \quad \text{oder} \quad \delta = \frac{\log(n)}{\log(\varepsilon)}$$

So ergibt sich etwa für die Küstenlinie Großbritanniens die fraktale Dimension 1,25; für die Norwegens 1,52. Eine entsprechende Verallgemeinerung ergibt die fraktale Dimension für höherdimensionale Figuren wie Flächen, Kuben etc.



3-D-Fraktale

9. Ausblick

Die Folgeresultate der Gödelschen Unentscheidbarkeitstheoreme demonstrieren bereits für die mathematisierten Naturwissenschaften auf der rein logisch-mathematischen Ebene prinzipiell unausweichliche axiomatische Unvollständigkeiten und Nichtentscheidbarkeiten, mit denen nur durch intelligente und bewertende Handlungen des Menschen auf der Grundlage pragmatischer Entscheidungen kontrolliert umgegangen werden kann. Gerade die Physik stand im Verdacht, sich eine künstliche Welt des Einfachen konstruiert zu haben, in der die komplizierten Erfahrungen das Attribut des Schmutzigen erhielten. Sogenannte "Dreckeffekte“ wie Dissipation und Nichtlinearitäten wurden aus methodologischen Gründen lange Zeit vernachlässigt. Die Erforschung des Chaos und die damit verbundene Theorie komplexer Systeme haben jedoch in den letzten Jahren gezeigt, dass diese Effekte aus unseren naturwissenschaftlichen Modellbildungen nicht mehr ausgeschlossen werden können ([3], 454 f.).

Und tatsächlich findet mit der physikalischen und mathematischen Analyse des Chaos ein deutlicher Bedeutungswandel der tradierten umgangssprachlichen Chaosbegriffe statt: Das "neue" Chaos ist eben bei weitem nicht so chaotisch wie dasjenige der Mythologien. Vielmehr wird ein Forschungsfeld eröffnet, in dem die traditionellen Ordnungsbegriffe von deterministischer Gesetzmäßigkeit und Berechenbarkeit eine Verbindung mit dem Zufallsbegriff im Sinne von langfristiger Nichtberechenbarkeit eingehen. Dass nachgewiesen wurde, dass die mathematisierten Naturwissenschaften nichtalgorithmisierbare Systeme, logische Unvollständigkeiten und Unentscheidbarkeiten enthalten, ist eines der Verdienste der Chaostheorie. Es wird also keine postmoderne Irrationalität eingeläutet sondern vielmehr geht es darum, Systeme mit komplizierten Lösungsverhalten zu verstehen, die bislang vom wissenschaftlichen Diskurs weitgehend ausgeschlossen waren ([3], 449).

Insbesondere gehören dazu die "weicheren" Wissenschaften, angefangen von den Wirtschaftswissenschaften über Managementtheorien bis zum Verständnis des eigenen Verhaltens und komplexer Lernprozesse. Gerade im Wissensmanagement geht es nicht um die Reduzierung von Komplexität, sondern vielmehr um die Nutzung dieser Komplexität, also an den Phasenübergängen die neuen Ordnungsmuster zu erkennen und zwischen den einzelnen Phasen, die ja nicht linear aufeinanderfolgen müssen, neue Einsichten zu erhalten, die Phantasie und die Vorstellungskraft zu beflügeln. Das sind genau die wichtigsten Komponenten, neue Wege des Wissens zu beschreiten. Wie etwa die Metapher der Chaos- und Komplexitätstheorie im Unternehmen genutzt werden können, um die Kreativität zu steigern, wurde in [7] dargelegt.

10. Links

[1] Briggs; Peat: "Die kreative Kraft des Chaos"; Die kreative Kraft des Chaos; Knaur 2004

[2] J. Gleick: "Chaos – making a new Science"; Penguin Books 1987

[3] T. Leiber: "Kosmos, Kausalität und Chaos"; Ergon Verlag 1996

[4] B. Greene: "Das elegante Universum"; Siedler Verlag 2000

[5] K. Mainzer: "Komplexität"; Wilhelm Fink Verlag 2008

[6] M. Flämig: "Naturwissenschaftliche Weltbilder in Managementtheorien"; Campus Verlag 1998

[7] B. v. Guretzky: "Wissensmanagement 3.0"; http://www.community-of-knowledge.de/beitrag/293/

[8] Die Farbbilder wurden mir dankenswerter Weise von Brummbaer zur Verfügung gestellt: www.brummbaer.net

[9] Die Funktionsverläufe wurden mit Hilfe des *Wolfram Mathematica Player* erstellt.